Université Abdelmalek Essaâdi
FST Tanger/Année 09-10/
MIPC/M112

Contrôle continu n°1

Exercice1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[, \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{u_n^2}{2}. \end{cases}$$

On définit la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow R$ par $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2}$.

1. Montrer que $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$. Donner les solutions $0 < \alpha < \beta$ de l'équation $f(x) = x$.
2. Montrer que

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - \alpha)(u_n - \beta), \\ u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - \alpha)(u_n + \alpha). \end{cases}$$

3. Montrer que si $u_0 \in]0, \alpha[$, la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée. Calculer sa limite.
4. Etudier la suite $(u_n)_n$ si $u_0 \in]\alpha, \beta[$.
5. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ quand $u_0 > \beta$.

Exercice2

On considère la fonction $f : R \longrightarrow R$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{3x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que la fonction $g : x \longrightarrow \sqrt{|x|} f(x)$ est continue en 0.

Exercice3

Soient $a, b \in R$ tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, & v_0 = b, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, & v_{n+1} = \sqrt{v_n u_{n+1}} \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que

$$u_n < v_n, \forall n \in N.$$



2. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes.

3. On pose $a = b\cos\alpha$; $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n},$$
$$v_n = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

4. En déduire, utilisant la relation $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$; $\theta \in \mathbb{R}$, que

$$v_n = b\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

5. Calculer la limite commune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.



Institut la centrale   Contrôle n° 1   09-10

Exercice 1 $u_0 > 0$ $U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{U_n^2}{2}$; $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2}$

1/. f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. ($\because \forall x \in [0,+\infty[: f'(x) = x \geq 0$)

donc $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [\frac{1}{4}, +\infty[\subset [0,+\infty[$

• $f(x) = x \iff \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} = x \iff \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} = 0$; $\Delta = 8$

$\alpha = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$; $\beta = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ $S = \{\alpha, \beta\}$

2/ $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{1}{2}(U_n - \alpha)(U_n - \beta)$ car $f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)$

$U_{n+1} - \alpha = f(U_n) - f(\alpha) = \left(\frac{1}{4} + \frac{U_n^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{U_n^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}(U_n - \alpha)(U_n + \alpha)$

(α racine de l'equation $f(x) = x$ càd $f(\alpha) = \alpha \iff \alpha = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{2}$)

3/ * M.que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < \alpha$.

• On a $u_0 \in]0, \alpha[$ càd $0 < U_0 < \alpha$

• Supp. $0 < U_n < \alpha$ et m.que $0 < U_{n+1} < \alpha$

Or $0 < U_n < \alpha$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(0) < f(U_n) < f(\alpha)$

càd $\frac{1}{4} < U_{n+1} < \alpha$ d'où $0 < U_{n+1} < \alpha$

* M.que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} > U_n$

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \geq 0$ car $0 < U_n < \alpha$

($\forall x \in [0, \alpha[$: $f(x) - x \geq 0$)

* f est continue sur $[0,+\infty[$ et $f([0,+\infty[) \subset [0,+\infty[$

la suite (U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est convergente vers ℓ

avec $0 \leq \ell \leq \alpha$ et $\ell = f(\ell)$ d'où $\ell = \alpha$ d'après 1/

4/ * M.que $\forall n \in \mathbb{N}$. $\alpha < U_n < \beta$

• $u_0 \in]\alpha, \beta[$; $\alpha < U_0 < \beta$

• Supp $\alpha < U_n < \beta$ et m.q $\alpha < U_{n+1} < \beta$

or $\alpha < U_n < \beta$ et f est décroissante sur $]\alpha, \beta[$ donc $f(\beta) < f(U_n) < f(\alpha)$

càd $\beta < U_{n+1} < \alpha$; or $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < U_{n+1} < \beta$

* M.que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} < U_n$

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ car $\alpha < U_n < \beta$ ($\forall x \in]\alpha, \beta[$; $f(x) - x < 0$)

On a (U_n) décroissante et minorée par α donc (U_n) est convergente vers ℓ ; $\alpha \leq \ell \leq \beta$ et $\ell = f(\ell)$ d'où $\ell = \alpha$ ou $\ell = \beta$.

Comme (U_n) est décroissante alors $\lim U_n = \alpha$

5/ * M. que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > \beta$

. $U_0 > \beta$ évident

. Supp $U_n > \beta$ alors $f(U_n) > f(\beta)$ càd $U_{n+1} > \beta$ ($f \nearrow$ sur $]\beta, +\infty[$)

* M. que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$

. $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 > 0$ car $f(x) - x > 0 \quad \forall x \in]\beta, +\infty[$

. Supp $U_{n+1} > U_n$ alors $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ càd $U_{n+2} > U_{n+1}$

* la suite (U_n) est croissante et non majorée (car $f(x)$ est non majorée sur $\mathbb{R}^+$)

donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 2 $\quad f(x) = \cos \frac{1}{3x} \quad x \neq 0 \ ; \quad f(0) = 0$

1/ Considérons la suite $x_n = \frac{1}{3n\pi}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite (ses 2 suites extraites $f(x_{2n}) = 1$ et $f(x_{2n+1}) = -1$ n'ont pas la même limite)

2/ $\forall x \neq 0 \ |g(x)| = |\sqrt{|x|} \cdot f(x)| = \sqrt{|x|}\,|f(x)| \leq \sqrt{|x|}$

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est cont en 0


ETUSUP.com